模块二 二项式定理

第 1 节 求展开式中某项的系数（★★）

强化训练

1．（2020·北京卷·★）在 $(\sqrt{x}-2)^5$ 的展开式中，x^2 的系数为_____.

答案：-10

解析：要求 x^2 的系数，先写出展开式的通项，

$T_{r+1}=C_5^r(\sqrt{x})^{5-r}(-2)^r=(-2)^rC_5^rx^{\frac{5-r}{2}}\ (r=0,1,2,\cdots,5)$ ①，

令 $\frac{5-r}{2}=2$ 可得 $r=1$，代入①得展开式中含 x^2 的项为 $T_2=(-2)^1C_5^1x^2=-10x^2$，其系数为 -10.

2．（2023·广东湛江二模·★）在 $(2x^2-\frac{1}{x})^5$ 的展开式中，x^4 的系数是（　　）

（A）40　（B）-40　（C）80　（D）-80

答案：C

解析：要求 x^4 的系数，先写出展开式的通项，

$T_{r+1}=C_5^r(2x^2)^{5-r}(-\frac{1}{x})^r=2^{5-r}(-1)^rC_5^rx^{10-3r}\ (r=0,1,\cdots,5)$ ①，

令 $10-3r=4$ 可得 $r=2$，代入①得展开式中含 x^4 的项为 $T_3=2^3\cdot(-1)^2\cdot C_5^2\cdot x^4=80x^4$，其系数为 80.

3．（2020·新课标III卷·★）$(x^2+\frac{2}{x})^6$ 的展开式中常数项是_____.（用数字作答）

答案：240

解析：要求常数项，先写出展开式的通项，由题意，$T_{k+1}=C_6^k(x^2)^{6-k}(\frac{2}{x})^k=2^kC_6^kx^{12-3k}\ (k=0,1,\cdots,6)$，

令 $12-3k=0$ 得：$k=4$，所以展开式的常数项为 $T_5=2^4C_6^4=240$.

4．（2023·浙江模拟·★）二项式 $(x-\frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式中的常数项等于_____.

答案：15

解析：要求常数项，先写出展开式的通项，由题意，$T_{k+1}=C_6^kx^{6-k}(-\frac{1}{\sqrt{x}})^k=(-1)^kC_6^kx^{6-\frac{3k}{2}}\ (k=0,1,\cdots,6)$，

令 $6-\frac{3k}{2}=0$ 可得 $k=4$，故所求常数项为 $T_5=(-1)^4C_6^4=15$.

5．（2023·广东二模·★★）已知 $n\in\mathbf{N}^*$，若 $(x-\frac{1}{x^2})^n$ 的展开式中存在常数项，写出 n 的一个值为_____.

答案：3（答案不唯一，详见解析）

解析：要分析展开式的常数项，先写出通项，

$T_{r+1}=C_n^rx^{n-r}(-\frac{1}{x^2})^r=(-1)^rC_n^rx^{n-3r}\ (r=0,1,\cdots,n)$ ①，

展开式中存在常数项等价于存在 $r=0,1,\cdots,n$ 使得 $n-3r=0$，所以 $n=3r$，

从而 n 必为 3 的倍数，结合 $n\in\mathbf{N}^*$ 知 n 可取 3，6，9，12 等数.

6.（2023·山西太原模拟·★★）$(x+\frac{1}{x})(1-2x)^6$ 的展开式中含 x^2 项的系数为_____.

答案：-172

解析： $(x+\frac{1}{x})$这部分次数较低，可用乘法分配律拆成两部分，分别求含 x^2 的项，

$(x+\frac{1}{x})(1-2x)^6=x(1-2x)^6+\frac{1}{x}(1-2x)^6$，其中 $(1-2x)^6$ 展开式的通项 $T_{k+1}=\mathrm{C}_6^k(-2x)^k=(-2)^k\mathrm{C}_6^kx^k(k=0,1,\cdots,6)$ ①，

先看 $x(1-2x)^6$ 这部分，要产生 x^2，应取 $(1-2x)^6$的展开式中含 x 的项，

由①可得 $T_2=(-2)^1\mathrm{C}_6^1x=-12x$，所以 $x(1-2x)^6$ 的展开式中含 x^2 的项为 $xT_2=-12x^2$，

再看 $\frac{1}{x}(1-2x)^6$这部分，要产生 x^2，应取 $(1-2x)^6$的展开式中含 x^3 的项，

由①可得 $T_4=(-2)^3\mathrm{C}_6^3x^3=-160x^3$，所以 $\frac{1}{x}(1-2x)^6$的展开式中含 x^2 的项为 $\frac{1}{x}T_4=-160x^2$，

综上所述，$(x+\frac{1}{x})(1-2x)^6$ 的展开式中含 x^2 项的系数为 $-12+(-160)=-172$.

7.（2020·新课标Ⅰ卷·★★）$(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5$ 的展开式中，x^3y^3 的系数为（　　）

（A）5　（B）10　（C）15　（D）20

答案：C

解析： $(x+\frac{y^2}{x})$ 这部分次数较低，可用乘法分配律拆成两部分，分别求含 x^3y^3的项，

$(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5=x(x+y)^5+\frac{y^2}{x}(x+y)^5$，其中 $(x+y)^5$ 展开式的通项 $T_{k+1}=\mathrm{C}_5^kx^{5-k}y^k(k=0,1,\cdots,5)$ ①，

先看 $x(x+y)^5$这部分，要产生 x^3y^3，应取 $(x+y)^5$ 的展开式中 x^2y^3这一项，

令 $\begin{cases}5-k=2\\k=3\end{cases}$ 可得 $k=3$，代入①得 $T_4=\mathrm{C}_5^3x^2y^3=10x^2y^3$，所以 $x(x+y)^5$ 的展开式中含 x^3y^3 的项为 $xT_4=10x^3y^3$；

再看 $\frac{y^2}{x}(x+y)^5$这部分，要产生 x^3y^3，应取 $(x+y)^5$ 的展开式中 x^4y这一项，

令 $\begin{cases}5-k=4\\k=1\end{cases}$ 可得 $k=1$，代入①得 $T_2=\mathrm{C}_5^1x^4y=5x^4y$，所以 $\frac{y^2}{x}(x+y)^5$的展开式中含 x^3y^3 的项为 $\frac{y^2}{x}T_2=5x^3y^3$；

综上所述，$(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5$的展开式中 x^3y^3 的系数为 $10+5=15$.

8.（2023·辽宁模拟·★★★）$(1+3x)^6(1-x)^3$ 的展开式中 x^2 的系数为_____.

答案：84

解析： 相乘的两项次数都较高，不便于拆成几部分来分析，故写出两项各自的通项来看，

$(1+3x)^6$ 和 $(1-x)^3$ 的展开通项分别为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r(3x)^r=3^r\mathrm{C}_6^r x^r(r=0,1,2,\cdots,6)$，

$P_{k+1}=\mathrm{C}_3^k(-x)^k=(-1)^k\mathrm{C}_3^k x^k(k=0,1,2,3)$，

所以 $T_{r+1}P_{k+1}=3^r\mathrm{C}_6^r x^r\cdot(-1)^k\mathrm{C}_3^k x^k=(-1)^k 3^r\mathrm{C}_6^r\mathrm{C}_3^k x^{r+k}$，要求 x^2 的系数，故分析怎样能使 $r+k=2$ 即可，

令 $r+k=2$ 可得：$\begin{cases}r=0\\k=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}r=1\\k=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}r=2\\k=0\end{cases}$，对应的项分别为 $T_1P_3=(-1)^2 3^0\mathrm{C}_6^0\mathrm{C}_3^2x^2=3x^2$，

$T_2P_2=(-1)^1 3^1\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_3^1x^2=-54x^2$，$T_3P_1=(-1)^0 3^2\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_3^0x^2=135x^2$，故所求 x^2 的系数为 $3+(-54)+135=84$.

9.（2023・湖南永州二模・★★）$(x+\dfrac{1}{x}-2)^5$ 的展开式中含 x^2 的项为_____.

答案：$-120x^2$

解析：观察发现通分可化完全平方式处理，$(x+\dfrac{1}{x}-2)^5=(\dfrac{x^2-2x+1}{x})^5=\dfrac{[(x-1)^2]^5}{x^5}=\dfrac{(x-1)^{10}}{x^5}$，

注意到分母为 x^5，故要求展开式中 x^2 的系数，应考虑分子展开式中含 x^7 的这一项，

$(x-1)^{10}$ 的展开通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_{10}^r x^{10-r}(-1)^r=(-1)^r\mathrm{C}_{10}^r x^{10-r}(r=0,1,2,\cdots,10)$，

令 $10-r=7$ 可得 $r=3$，所以 $T_4=(-1)^3\mathrm{C}_{10}^3x^7=-120x^7$，故 $(x+\dfrac{1}{x}-2)^5$ 的展开式中含 x^2 的项为 $\dfrac{T_4}{x^5}=-120x^2$.

10.（2023・浙江模拟・★★★）$(x+\dfrac{2}{x}-y)^7$ 的展开式中 xy^4 的系数为_____.

答案：210

解析：利用三项展开原理解答，将原式写成 7 项之积，

$(x+\dfrac{2}{x}-y)^7=(x+\dfrac{2}{x}-y)(x+\dfrac{2}{x}-y)\cdots(x+\dfrac{2}{x}-y)$，

由于 $x+\dfrac{2}{x}-y$ 中 y 只出现一次，故要产生 xy^4，只能 7 个 $(x+\dfrac{2}{x}-y)$ 中有 4 个取 $-y$，剩余 3 个里面，2 个取 x，1 个取 $\dfrac{2}{x}$，得到的才是 xy^4，

展开式中含 xy^4 的项为 $\mathrm{C}_7^4(-y)^4\mathrm{C}_3^2x^2\mathrm{C}_1^1\dfrac{2}{x}=210xy^4$，故其系数是 210.

11.（2023・黑龙江大庆模拟・★★★）$(x-\dfrac{2}{x}-1)^5$ 的展开式中的常数项为（　　）

（A）-81　（B）-80　（C）80　（D）161

答案：A

解析：$x-\dfrac{2}{x}-1$ 无法变形为完全平方式，可利用三项展开式的原理，分析相乘的 5 个 $x-\dfrac{2}{x}-1$ 中 x，$-\dfrac{2}{x}$ 和 -1 分别取几个，相乘后恰为常数，

$(x-\dfrac{2}{x}-1)^5=(x-\dfrac{2}{x}-1)(x-\dfrac{2}{x}-1)(x-\dfrac{2}{x}-1)(x-\dfrac{2}{x}-1)(x-\dfrac{2}{x}-1)$，

要使展开式中 x 的次数为 0，上式的五个 $(x-\dfrac{2}{x}-1)$ 中取 x，$-\dfrac{2}{x}$ 和 -1 的个数有下面几种情况：

①不取 x 和 $-\frac{2}{x}$，全部取 -1，这样得到的项为 $\mathrm{C}_5^5(-1)^5=-1$；

②取 1 个 x，1 个 $-\frac{2}{x}$，3 个 -1，这样得到的项为 $\mathrm{C}_5^1x\cdot\mathrm{C}_4^1(-\frac{2}{x})\cdot\mathrm{C}_3^3(-1)^3=40$；

③取 2 个 x，2 个 $-\frac{2}{x}$，1 个 -1，这样得到的项为 $\mathrm{C}_5^2x^2\cdot\mathrm{C}_3^2(-\frac{2}{x})^2\cdot\mathrm{C}_1^1(-1)^1=-120$；

综上所述，$(x-\frac{2}{x}-1)^5$ 的展开式中的常数项为 $-1+40+(-120)=-81$.

12．（2023 • 浙江宁波十校联考 • ★★★）已知 $(1+x)(1-2x)^6=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_7(x-1)^7$，则 $a_2=$______.

答案：132

解析：所给展开式是按 $x-1$ 展开的，为了便于观察，可将 $x-1$ 换元，化为我们熟悉的形式，

令 $t=x-1$，则 $x=t+1$，代入原式化简得：$(t+2)(2t+1)^6=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_7t^7$ ①，

式①左侧 $t+2$ 的次数较低，可用乘法分配律拆成两部分分别求展开式中含 t^2 的项，

$(t+2)(2t+1)^6=t(2t+1)^6+2(2t+1)^6$，且 $(2t+1)^6$ 的展开通项 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r(2t)^{6-r}=2^{6-r}\mathrm{C}_6^rt^{6-r}(r=0,1,\cdots,6)$，

先看 $t(2t+1)^6$ 这部分，要产生 t^2，应取 $(2t+1)^6$ 的展开式中含 t 的项，

令 $6-r=1$ 可得 $r=5$，所以 $T_6=2\mathrm{C}_6^5t=12t$，故 $t(2t+1)^6$ 的展开式中含 t^2 的项为 $12t^2$，

同理，$2(2t+1)^6$ 的展开式中含 t^2 的项为 $2T_5=2\times2^2\mathrm{C}_6^4t^2=120t^2$，

所以 $(t+2)(2t+1)^6$ 的展开式中含 t^2 的项为 $12t^2+120t^2=132t^2$，故 $a_2=132$.